Polinomios

MULTIPLICACION Y DIVISION DE POLINOMIOS

Propiedad de exponentes

Antes de pasar a multiplicación y división de polinomios, debemos recordar algunas de las leyes de exponentes.

Sea b un número real; m y n dos números enteros, entonces:

1era ley: $b^n * b^m = b^{n+m}$

- **Cuando se multiplican bases iguales se suman exponentes.**

2da ley: $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

- **Cuando se dividen bases iguales se restan exponentes.**

Propiedades de exponentes (cont)

Ejemplo:

$$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3)(3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^5$$

$$x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$$

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$$

En general,

$$b^n \cdot b^m = \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{n \text{ factores de } b}\underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{m \text{ factores de } b}$$

$$= \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n+m \text{ factores de } b}$$

$$= b^{n+m}$$

Multiplicación de monomios

- La multiplicación de monomios se realiza de la siguiente manera:
  - Se **multiplican los coeficientes** numéricos
  - Si la **parte variable** de los términos tiene la misma variable, su producto va a tener la **misma variable** con un exponente nuevo que es la **suma** de los exponentes de los términos.
    - **Ej: $(2x^2)(3x^4) = (2)(3)(x^2x^4) = 6x^6$**
  - Si la parte variable de los términos tiene **variables diferentes**, éstos se escriben uno al lado del otro, **sin cambiar**.
    - **Ej: $(-5x^3)(3y^2) = (-5)(3)(x^3y^2) = -15x^3y^2$**

Ejemplos- Multiplicación de monomios

- $4x^2(2x^4y)$

$$= (4)(2)(x^2x^4)y$$
$$= 8x^{(2+4)}y$$
$$= 8x^6y$$

- $-2y^3(3y^4z^5)$

$$= (-2)(3)(y^3y^4)z^5$$
$$= -6y^{(3+4)}z^5$$
$$= -6y^7z^5$$

Ejemplos- Multiplicación de monomios

a) $5x^6y^6 (-4x^4y)$

$= (5)(-4)(x^6\, x^4)(y^6\, y)$

$= -20x^{(6+4)}y^{(6+1)}$

$= -20x^{10}y^7$

b) $-2a^4b^3c^6(ab^2c^5)$

$= -2(a^4\, a)(b^3\, b^2\,)(c^6c^5)$

$= -2\, a^{(4+1)}b^{(3+2)}c^{(6+5)}$

$= -2a^5b^5c^{11}$

Multiplicación de un monomio por un polinomio.

Les recordamos la ley distributiva :

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

Ejemplos:

a) $x(2x^3 + 45)$

$= x(2x^3) + 45x$

$= 2x^4 + 45x$

b) $2a^2(-3b^3 – 12)$

$= 2a^2(-3b^3) – 2a^2(12)$

$= -6a^2b^3 – 24a^2$

Multiplicación de un monomio por un polinomio.

Ejemplo:

c) $5y^2(2y^3 - 5y^2 + 9) - 2(4y^2 - 3y)$

$= (5)(2)(y^2y^3) - (5)(5)(y^2)(y^2) + (5)(9)y^2$

$+ (-2)(4y^2) - (-2)(3y)$

$= 10y^5 - 25y^4 + 45y^2 + (-8y^2) - (-6y)$

$= 10y^5 - 25y^4 + 37y^2 + 6y$

Multiplicación de binomio por binomio

Aquí aplicamos la propiedad distributiva dos veces:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$

$$= ac + ad + bc + bd$$

Esto equivale a multiplicar cada término de un binomio por cada término del otro binomio.

Al final, simplificar términos semejantes, si existen.

Ejemplos

- $(2x + 3)(4x^2 – 5)$

  $= 2x(4x^2 – 5) + 3(4x^2 – 5)$

  $= 8x^3 - 10x + 12x^2 – 15$

- $(x – 5)(2 – x)$

  $= x(2 – x) – 5(2 – x)$

  $= 2x – x^2 – 10 + 5x$

  $= -x^2 + 7x – 10$

- $(2x^2 – 5)(x^2 – 9)$

  $= 2x^2 (x^2 – 9) – 5(x^2 – 9)$

  $= 2x^4 – 18x^2 – 5x^2 + 45$

  $= 2x^4 – 23x^2 + 45$

Diferencia de cuadrados

a) $(2x + 1)(2x - 1)$

$= 2x(2x - 1) + 1(2x - 1)$

$= 4x^2 - 2x + 2x - 1$

$= 4x^2 - 1$

b) $(7 + 3y)(7 - 3y)$

$= 7(7 - 3y) + 3y(7 - 3y)$

$= 49 - 21y + 21y - 9y^2$

$= 49 - 9y^2$

Diferencia de cuadrados

En los ejemplos anteriores vemos que se multiplican dos binomios que **sólo** difieren en **el signo** de uno de los términos. Al multiplicar estos binomios el resultado es un **binomio de la forma**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

$$= \mathbf{a^2 - b^2}$$

- A este resultado se le conoce como una **diferencia de cuadrados**.

Diferencia de cuadrados

a) $(x + 1)(x - 1)$

Usando la fórmula anterior

$= x^2 - 1$

b) $(7x + 4)(7x - 4)$

Usando la fórmula anterior

$= (7x)^2 - 4^2$

$= 49x^2 - 16$

Otros ejemplos

- $(4x^2 - 1)^2$

$$= (4x^2 - 1)\,(4x^2 - 1)$$
$$= 4x^2\,(4x^2 - 1) - 1(4x^2 - 1)$$
$$= 16x^4 - 4x^2 - 4x^2 + 1$$
$$= 16x^4 - 8x^2 + 1$$

- $(10 - 2x)^2$

$$= (10 - 2x)(10 - 2x)$$
$$= 10(10 - 2x) - 2x(10 - 2x)$$
$$= 100 - 20x - 20x + 4x^2$$
$$= 100 - 40x + 4x^2$$

Otros ejemplos – cont.

- $(4x - 1)(3x + 1)$

  $= 4x(3x + 2) - 1(3x + 1)$

  $= 12x^2 + 8x - 3x - 1$

  $= 12x^2 + 5x - 1$

- $(1 - 2x)(2 - x)$

  $= 1(2 - x) - 2x(2 - x)$

  $= 2 - x - 4x + 2x^2$

  $= 2 - 5x + 2x^2$

Multiplicación - ejercicios

13. $(8ab^2c)(13a^2c)$

14. $(9abc^3)(14bc^2)$

15. $(5x^2)(2x)(3x^3)$

16. $(4x)(2x^2)(6x^4)$

17. $(4xy)(-2x)(7y^2)$

18. $(5y^2)(-3xy)(5x^2)$

19. $(-2ab)(-ab)(-3b)$

20. $(-7ab)(-4a)(-ab)$

21. $(6cd)(-3c^2d)(-4d)$

22. $(2c^3d)(-6d^3)(-5cd)$

23. $\left(\frac{2}{3}xy\right)\left(\frac{3}{5}x^2y^4\right)$

24. $\left(-\frac{5}{6}x\right)\left(\frac{8}{3}x^2y\right)$

47. $5x(3x + 2)$

49. $3x^2(6x - 2)$

51. $-4x(7x^2 - 4)$

53. $2x(x^2 - 4x + 6)$

55. $-6a(3a^2 - 5a - 7)$

57. $7xy(4x^2 - x + 5)$

59. $-xy(9x^2 - 2x - 6)$

Multiplicación - ejercicios

37. $(x + 2)(x + 9)$
38. $(x + 3)(x + 8)$
39. $(x + 6)(x - 2)$
40. $(x + 8)(x - 6)$
41. $(x + 3)(x - 11)$
42. $(x + 4)(x - 10)$
43. $(n - 4)(n - 3)$
44. $(n - 5)(n - 9)$
45. $(n + 6)(n + 12)$
46. $(n + 8)(n + 13)$
47. $(y + 3)(y - 7)$
48. $(y + 2)(y - 12)$
49. $(y - 7)(y - 12)$
50. $(y - 4)(y - 13)$
51. $(x - 5)(x + 7)$
52. $(x - 1)(x + 9)$
53. $(x - 14)(x + 8)$
54. $(x - 15)(x + 6)$
55. $(a + 10)(a - 9)$
56. $(a + 7)(a - 6)$
57. $(2a + 1)(a + 6)$
58. $(3a + 2)(a + 4)$
59. $(5x - 2)(x + 7)$
60. $(2x - 3)(x + 8)$

División de un polinomio entre un monomio

- **Cuando dividimos un polinomio entre un monomio, aplica la propiedad distributiva, además de la regla de exponentes.**

2da ley: $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

Cuando se dividen bases iguales se restan exponentes.

$$\frac{(a+b)}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

División de un polinomio entre un monomio

- Se divide cada término del polinomio entre el monomio.

$$\frac{(2\mathbf{x}^4 + 6\mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x}^2)}{2\mathbf{x}} = \frac{2x^4}{2x} + \frac{6x^3}{2x} - \frac{2x^2}{2x}$$ propiedad distributiva

$$= x^3 + 3x^2 - x$$ propiedad de exponentes

$$\left(2x^2y^3 + 16x^4y^2 - 8xy\right) \div (2xy)$$

$$= \frac{2x^2y^3}{2xy} + \frac{16x^4y^2}{2xy} - \frac{8xy}{2xy}$$

$$= xy^2 + 8x^3y - 4$$

División de un polinomio entre un monomio

- $\left(9a^3b^3 - 36a^2b \ - 45a^4b^2\right) \div \left(9a^2b\right)$

$$= \frac{9a^3b^3}{9a^2b} - \frac{36a^2b}{9a^2b} - \frac{45a^4b^2}{9a^2b}$$

$$= ab^2 - 4 - 5a^2b$$

- $\dfrac{12x^8y^6 + 96x^5y^4 - 72x^2y^2}{6x^2y^2}$

$$= \frac{12x^8y^6}{6x^2y^2} + \frac{96x^5y^4}{6x^2y^2} - \frac{72x^2y^2}{6x^2y^2}$$

$$= 2x^6y^4 + 16x^3y^2 - 12$$

División – cont.

- $$\frac{-42x^6 - 70x^4 + 98x^2}{14x^2}$$

$$= \frac{-42x^6}{14x^2} - \frac{70x^4}{14x^2} + \frac{98x^2}{14x^2}$$

$$= -3x^4 - 5x^2 + 7$$

- $$\frac{-24a^4b^2 + 36a^3b - 48a^2b}{-6ab}$$

$$= \frac{-24a^4b^2}{-6ab} + \frac{36a^3b}{-6ab} - \frac{48a^2b}{-6ab}$$

$$= 4a^3b - 6a^2 + 8a$$

Práctica: División

25. $\dfrac{8x^4 + 12x^5}{2x^2}$

26. $\dfrac{12x^3 + 16x^6}{4x}$

27. $\dfrac{9x^6 - 24x^4}{3x^3}$

28. $\dfrac{35x^8 - 45x^6}{5x^4}$

29. $\dfrac{-28n^5 + 36n^2}{4n^2}$

30. $\dfrac{-42n^6 + 54n^4}{6n^4}$

31. $\dfrac{35x^6 - 56x^5 - 84x^3}{7x^2}$

32. $\dfrac{27x^7 - 36x^5 - 45x^3}{3x}$

33. $\dfrac{-24n^8 + 48n^5 - 78n^3}{-6n^3}$

34. $\dfrac{-56n^9 + 84n^6 - 91n^2}{-7n^2}$

35. $\dfrac{-60a^7 - 96a^3}{-12a}$

36. $\dfrac{-65a^8 - 78a^4}{-13a^2}$

37. $\dfrac{27x^2y^4 - 45xy^4}{-9xy^3}$

38. $\dfrac{-40x^4y^7 + 64x^5y^8}{-8x^3y^4}$

39. $\dfrac{48a^2b^2 + 60a^3b^4}{-6ab}$

40. $\dfrac{45a^3b^4 - 63a^2b^6}{-9ab^2}$

Simplificar $\dfrac{4x-12}{x^2-9}$

- Solución: $\dfrac{4\mathbf{x}-12}{\mathbf{x}^2-9} = \dfrac{4(\mathbf{x}-3)}{(\mathbf{x}+3)(\mathbf{x}-3)}$

Factorizamos Numerador y denominador

$$= \frac{4}{x+3}$$

Simplificamos asumiendo que *x* es siempre diferente de 3

Simplificar $\dfrac{2\mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 - 3\mathbf{x} + 2}$

- Solución:

$$\frac{2\mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 - 3\mathbf{x} + 2} = \frac{2\mathbf{x}(\mathbf{x}^2 - 1)}{(\mathbf{x} - 2)(\mathbf{x} - 1)}$$

Factorizamos Numerador y denominador

$$= \frac{2\mathbf{x}(\mathbf{x} + 1)(\mathbf{x} - 1)}{(\mathbf{x} - 2)(\mathbf{x} - 1)}$$

$$= \frac{2\mathbf{x}(\mathbf{x} + 1)}{\mathbf{x} - 2}$$

Simplificamos asumiendo que *x* es siempre diferente de 1